

УДК 551.466.8

МОДУЛЯЦИЯ КОРОТКИХ ВЕТРОВЫХ ВОЛН В ПРИСУТСТВИИ ИНТЕНСИВНЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН. ЭФФЕКТ МОДУЛЯЦИИ ИНКРЕМЕНТА

© 2003 г. К. А. Горшков, И. С. Долина, И. А. Соустова, Ю. И. Троицкая

*Институт прикладной физики РАН
603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
E-mail: dolina@hydro.appl.sci-nnov.ru*

Поступила в редакцию 02.12.2002 г., после доработки 02.04.2003 г.

Предложена модель модуляции поверхностных волн сантиметрового диапазона в поле интенсивных внутренних волн. В качестве ее механизма рассмотрен эффект модуляции инкремента, вызванный вариацией поля скорости ветра над водной поверхностью, на которой задано неоднородное поле течений, созданное внутренней волной. Расчет модулированного инкремента проведен в рамках квазилинейной модели модуляции коротких ветровых волн турбулентным ветром. Для описания поля течений, создаваемых интенсивными внутренними волнами на поверхности, использована модель, описываемая комбинированным уравнением Кортевега – де Вриза. Параметры внутренних волн взяты из эксперимента COPE. Рассчитаны зависимости ветрового инкремента от фазы волнового цуга для различных значений скорости трения ветра и длины поверхностной волны при попутном и встречном направлении распространения внутренней волны относительно ветра. Результаты расчета качественно согласуются с экспериментальными данными.

Известно, что интенсивные внутренние волны проявляются на поверхности моря в виде полос, характеризующихся различной интенсивностью поверхностных волн. При этом возмущения регистрируются в широком спектре ветрового волнения: для волн с длинами от единиц метров до сантиметров. Модуляция амплитуды волн дециметрового диапазона хорошо объясняется в рамках кинематического механизма [1]. В то же время механизм модуляции сантиметровых волн до конца не выяснен, несмотря на пристальный интерес к этому диапазону поверхностных волн, определяющих радиоизображение морской поверхности. В середине 80-х годов была выдвинута гипотеза о “каскадном механизме” модуляции сантиметровых волн [2]. В последнее время было предложено физическое объяснение “каскадного механизма” как модуляции вынужденных высших гармоник волн дециметрового диапазона [3]. Следует однако заметить, что, как показывает эксперимент, вынужденные гармоники дециметровых волн вносят существенный вклад в спектр ветрового волнения сантиметрового диапазона при сильных ветрах [3]. При слабых ветрах основную часть составляют свободные ветровые волны, которые возбуждаются ветром. При этом модуляция поля скорости ветра, которая вызывает модуляцию инкремента коротких волн, может вносить существенный вклад в модуляцию волн сантиметрового диапазона. Эффект модуляции ветрового инкремента активно обсуждается в настоящее время в связи с проблемой определения гидродинамической

модуляционной передаточной функции длинных поверхностных волн и зыби [4–8]. Настоящая работа посвящена построению модели модуляции волн сантиметрового диапазона в поле интенсивных внутренних волн. Параметры внутренних волн были взяты из эксперимента COPE [9], в ходе которого наблюдались сверхинтенсивные внутренние волны, которым соответствовали большие контрасты рассеянного сигнала радиолокатора, обусловленные, по-видимому, большим гидродинамическим контрастом в поле резонансных поверхностных волн сантиметрового диапазона.

Для описания поля течений, создаваемых внутренними волнами на поверхности, была использована модель Гарднера, предложенная в [10]. Как было показано в [10], эта модель дает очень хорошее согласие с экспериментом COPE.

Настоящая работа имеет следующую структуру. В разделе 1 представлено краткое описание модели [10] и рассчитано поле скорости на поверхности для пакета солитонов внутренних волн, соответствующего наблюдениям COPE. В разделе 2 описана модель ветрового пограничного слоя над водной поверхностью, на которой задано неоднородное поле течений, создаваемое внутренней волной. В разделе 3 приведены результаты расчета переменного инкремента короткой волны в модулированном поле скорости ветра. На основании этих расчетов сделаны оценки модуляции спектральной плотности поля возвышений коротких волн и произведено их качественное сравнение с экспериментом COPE.

1. МОДЕЛЬ ИНТЕНСИВНЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

В ходе эксперимента COPE изучались течения, создаваемые мощными приливными внутренними волнами [9]. В целом наблюдаемая картина представляет собой распад длинной периодической волны в шельфовой зоне на последовательность импульсов, распространяющихся в направлении берега и взаимодействующих между собой. По многим признакам наблюдаемый процесс сильно нелинейный: амплитуды импульсов в несколько раз превышают толщину тонкого слоя жидкости (при двухслойной аппроксимации стратификации), их скорости значительно (в разы) превышают скорость линейных длинных внутренних волн и т.д. Как показывает проведенное недавно сравнение [10], эволюция больших групп указанных импульсов может быть в целом адекватно промоделирована ансамблями взаимодействующих солитонов в рамках комбинированного уравнения Кортевега–де Вриза с квадратичной и кубической нелинейностью (модели Гарднера):

$$\partial_t \eta + c \partial_x \eta + \alpha \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha_1 \eta^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (1)$$

Для исследуемой в работе двухслойной модели коэффициенты уравнения (1) принимают следующие значения: $c^2 \cong g(\Delta\rho/\rho)h_1$; $\alpha \cong \frac{3}{2} c/h_1$; $\beta = \frac{c}{6} h_1 h_2$;

$\alpha_1 \cong -\frac{3}{8} c/h_1^2$ (средние значения величин $h_1, h_2, \Delta\rho/\rho$

в областях проведения эксперимента составляли $h_1 \cong 7$ м, $h_2 \cong 143$ м, $\Delta\rho/\rho = 3 \times 10^{-3}$). Уравнение (1), обычно используемое для описания эволюции слабо нелинейных длинных внутренних волн, получается из полной системы уравнений гидродинамики в предположении относительно малого отклонения границы раздела жидкостей ($\eta(x, t)$) по сравнению с толщинами отдельных слоев ($h_{1,2}$), а также при условии, что характерные масштабы внутренних волн значительно превышают общую глубину жидкости. Кроме того, обычно квадратичный и кубический члены в уравнении (1) удерживаются одновременно при аномально малых значениях квадратичного слагаемого, т.е. при $h_2 \cong h_1$. В связи с этим важно подчеркнуть, что именно учет обоих нелинейных членов и при условии, когда $h_2 \gg h_1$ (т.е. при условии неправомерном с точки зрения слабо нелинейного приближения) позволяет получить весьма хорошее соответствие между амплитудами и скоростями наиболее интенсивных наблюдавшихся импульсов и солитонами уравнения (1). Более того, динамика взаимодействия солитонов оказывается близкой процессам столкновения импульсов, наблюдавшимся в эксперименте.

Описание поведения ансамблей из N взаимодействующих уединенных волн содержится в так называемых N -солитонных решениях вполне интегрируемых эволюционных уравнений, к которым относятся и уравнение (1). Однако извлечение детальной информации о процессе взаимодействия, включающей возможность определения параметров солитонов (координат, скоростей, амплитуд) в произвольный момент времени, непосредственно из известных формул для N -солитонных решений затруднено ввиду их громоздкости и сложности. Существенно более простое и наглядное описание взаимодействия солитонов может быть получено с помощью приближенного подхода, известного своей аналогией с описанием столкновения классических (точечных) частиц [10]. Как показано в [10] именно на примере уравнения (1), уже в первом порядке приближенный подход может быть усовершенствован настолько, что дает правильную общую структуру точного N -солитонного решения в виде строгой суперпозиции квазисолитонов с относительно медленно меняющимися параметрами. При этом решения для параметров квазисолитонов оказываются определяющими и последующими приближениями лишь уточняются, оставаясь качественно справедливыми при любых условиях задачи.

Односолитонное решение уравнения (1) имеет вид

$$\eta_s = \frac{\alpha}{2\alpha_1} \sqrt{\frac{V}{V_{кр}}} \times \left[\operatorname{th} \frac{(x - (c + V)t + \Delta)}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}} - \operatorname{th} \frac{(x - (c + V)t - \Delta)}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}} \right], \quad (2)$$

где $V_{кр} = \alpha^2/6\alpha_1$, $D\sqrt{V/\beta} = \operatorname{arch}\left(1 - \frac{V}{V_{кр}}\right)^{-1/2}$. Амплитуда солитона (2) $(\eta_s)_{\max} = \frac{\alpha}{\alpha_1} \sqrt{\frac{V}{V_{кр}}} \operatorname{th}(\Delta/\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2})$

меняется от нуля (при этом его скорость совпадает с c) до максимального значения, равного α/α_1 , когда его скорость достигает величины $c + V_{кр}$. Отметим, что именно солитонам, близким к предельным, и отвечают наиболее интенсивные наблюдавшиеся в эксперименте COPE импульсы внутренних волн.

Принципиальной для задачи о взаимодействии является возможность представления солитона (2) как составной структуры, сформированной из более элементарных образований – кинков. Такие решения существуют в рамках (1) при $V = V_{кр}$ и имеют вид:

$$\eta_K^\pm = \frac{\alpha}{2\alpha_1} \left(1 \pm \operatorname{th} \frac{1}{2} \left[\frac{x - (x + V_{кр})}{\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}} \right] \right). \quad (3)$$

Сравнение выражений (3) и (2) вблизи $V \gg V_{кр}$, когда солитон имеет вид плато большой протяженности ($\Delta \gg 1$), ограниченного резкими перепадами поля, позволяет записать решение (2) следующим образом:

$$\eta_s = \eta_k^+ + \eta_k^- - \frac{\alpha}{2\alpha_1} \cong \frac{\alpha}{2\alpha_1} \left[\text{th} \frac{(x - (c + V_{кр})t + \Delta)}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}} - \text{th} \frac{(x - (c + V_{кр})t - \Delta)}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}} \right] \quad (4)$$

Представление (4) соответствует составному решению, получаемому методом сращиваемых асимптотических разложений [10]: общее решение состоит из суммы решений, находимых в областях с быстрыми изменениями поля, за вычетом их общей асимптотики, являющейся решением во внешней

области (в данном случае это константа $\frac{\alpha}{2\alpha_1}$). Соб-

ственно процедура сращивания и представление (4) не определяют всех параметров солитона (в частности, величину Δ), но правильно передают общую структуру поля (суперпозиция кинков). Это позволяет отыскивать решение более общей задачи о взаимодействии N солитонов в нулевом приближении как суперпозиции $2N$ кинков (3) чередующейся полярности:

$$\eta_N^0(x, t) = \frac{\alpha}{2\alpha_1} \sum_{i=1}^{2N} (-1)^{i+1} \text{th} \frac{1}{2} \frac{(x - (c + V_{кр})t + S_i(t))}{\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}} \quad (5)$$

Здесь $S_i(t)$ – медленно меняющиеся части координат кинков, такие, что $d_t S_i \ll V_{кр}$ (собственно малыми параметрами задачи ϵ_i являются отношения $(V_{кр} - V_i)/V_{кр}$, где V_i – скорости невозмущенных стационарных солитонов; определенные таким образом величины ϵ_i остаются, очевидно, меньшими единицы для всех допустимых значений V_i).

Алгоритм построения решений в следующих приближениях состоит в нахождении локальных поправок, отыскиваемых независимо вблизи каждого из кинков, и их последующим сращиванием. Кроме того, в каждом n приближении процедура сращивания локальных поправок $\eta_i^{(n)}$, отыскиваемых вблизи данного i -го кинка, должна учитывать экспоненциально убывающие от центров соседних кинков асимптотики соответствующего порядка.

Следуя этому алгоритму, получаем, что общее N -солитонное решение с учетом поправок перво-

го приближения приобретает вид

$$\eta_N^{(0)} + \eta_N^{(1)} = \left(\frac{\alpha}{2\alpha_1} \right)^{2N} \sum_{i=1}^{2N} (-1)^{i+1} (1 - \partial_t S_i) \times \text{th} \frac{[x - (c + V_{кр})t - S_i(t)]}{2\sqrt{6\alpha_1\beta/\alpha^2}}, \quad (6)$$

где координаты кинков S_i находятся из решения системы уравнений:

$$\frac{dS_i}{dt} = -4(e^{-(S_{i+1}-S_i)} + e^{-(S_i-S_{i+1})}). \quad (7)$$

Замечательно, что и точное N -солитонное решение уравнения (1) может быть приведено к виду (6) с заменой S_i на некоторые точные зависимости Q_i . Важно, что величины Q_i допускают разложение в сходящиеся ряды во всем допустимом диапазоне $\epsilon_i \in (0, 1)$. При этом главные члены этих разложений совпадают с решениями (7).

Полученное представление N -солитонного решения в виде (6), (7) удобно для сопоставления с экспериментальными данными. В ходе эксперимента СОРЕ были получены записи внутренних волн в двух точках, расположенных в 28 и 8 км от берега. Последовательность импульсов, записанная в дальней от берега точке, рассматривалась как начальное условие: по амплитудам импульсов и интервалам между ними вычислялись координаты кинков S_i , которые служили начальными данными для уравнения (7). Затем эта система решалась численно на промежутке времени, равном времени пробега солитонами расстояния в 20 км, после чего по формуле (7) восстанавливался волновой профиль в ближней к берегу точке. Тестировалась группа из 9 импульсов – солитонов с амплитудами от 25 до 15 м, скорости которых отличались от максимальной $(c + V_{кр})$ на весьма малую величину от 0.01 $V_{кр}$ до 0.1 $V_{кр}$ соответственно. Абсолютные расчетные значения величин оказались по существу одинаковыми $c = V_{кр} = 0.48$ м/с. Рассчитанное время пробега группы импульсов между рассматриваемыми точками 6.2 ч неплохо соответствует экспериментально замеренному значению 6.01 ч. Совпадает с экспериментально наблюдаемой и рассчитанная по (7) очередность расположения импульсов по амплитудам, хотя соотношение интервалов между солитонами на 10–50% отличается от соответствующих наблюдаемых величин. Для полноты сравнения необходимо указать, что модель (1) значительно хуже (с отличием в 1.5–2 раза) описывает пространственно-временные масштабы наблюдаемых импульсов. Отметим в связи с этим, что в самое последнее время появились полуфеноменологические модели вида (1) с более сложной структурой нелинейных и дисперсионных членов, дающие очень хорошее описание наблюдаемых импуль-

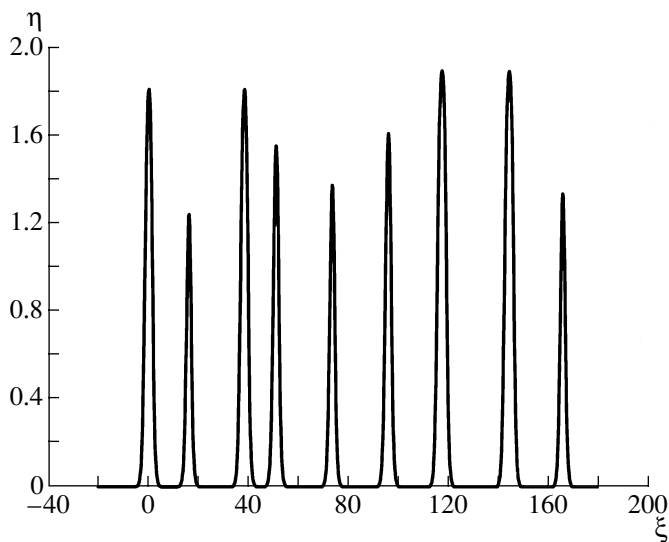


Рис. 1. Зависимость смещения изопикны во внутренней волне от горизонтальной координаты $\chi = x/L_x$.

сов внутренних волн по всем параметрам. Вопрос о взаимодействии уединенных волн в рамках этих усовершенствованных моделей остается пока открытым. Весьма неплохое соответствие теоретических расчетов экспериментальным данным позволяет использовать теоретическую модель для определения поля скорости на поверхности жидкости.

Приведем приближенную расчетную формулу для группы из 9 импульсов – солитонов внутренних волн, соответствующих наблюдениям СОРЕ, для указанных выше параметров в фиксированный момент времени, которую мы будем использовать далее для расчетов поля скорости на поверхности двухслойной жидкости:

$$\begin{aligned} \eta_9^0(x, t)(\text{м}) = & 14.03[\text{th}((25.7)^{-1}(x + 38.5)) - \\ & - \text{th}((25.7)^{-1}(x - 38.5)) + \text{th}((25.7)^{-1}(x - 395.6)) - \\ & - \text{th}((25.7)^{-1}(x - 432.9)) + \text{th}((25.7)^{-1}(x - 946.7)) - \\ & - \text{th}((25.7)^{-1}(x - 1023.8)) + \text{th}((25.7)^{-1}(x - 1286.1)) - \\ & - \text{th}((25.7)^{-1}(x - 1339.5)) + \text{th}((25.7)^{-1}(x - 1871.28)) - \\ & - \text{th}((25.7)^{-1}(x - 1914.5)) + \text{th}((25.7)^{-1}(x - 2442.4)) - \\ & - \text{th}((25.7)^{-1}(x - 2499.6)) + \text{th}((25.7)^{-1}(x - 2977)) - \\ & - \text{th}((25.7)^{-1}(x - 3070.8)) + \text{th}((25.7)^{-1}(x - 3669.9)) - \\ & - \text{th}((25.7)^{-1}(x - 3763.1)) + \text{th}((25.7)^{-1}(x - 4246.9)) - \\ & - \text{th}((25.7)^{-1}(x - 4288.3))]. \end{aligned} \quad (8)$$

Зависимость смещения изопикны во внутренней волне от горизонтальной координаты $\xi = x/L_x$

($L_x = 25.7$ м), рассчитанная по формуле (8), изображена на рис. 1.

Имея в виду двухслойную аппроксимацию стратификации, условия “твердой крышки” на поверхности и приближение мелкой воды, из закона сохранения массы в каждом слое

$$\partial_t(h_1 + \eta) + \partial_x[(h_1 + \eta)U] = 0$$

получаем связь найденных выше решений η_N с полем скорости на поверхности $U(x, t)$ для указанных выше параметров модели

$$U(\text{м/с}) = 0.45 \frac{\eta_9(\text{м})/7}{1 + \eta_9(\text{м})/7}. \quad (9)$$

На основе полученных приближенных расчетов для группы из 9 импульсов – солитонов внутренних волн, соответствующих наблюдениям СОРЕ, восстанавливалось поле скорости на поверхности, которое затем (см. раздел 3) использовалось для расчетов модуляции спектральной плотности поля возвышения коротких волн.

Возмущения поля скорости на водной поверхности вызывают возмущения скорости в приводном атмосферном пограничном слое. Рассмотрим их в рамках простой полуэмпирической модели турбулентности.

2. ВЕТРОВОЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НАД ВОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ С НЕОДНОРОДНЫМ ПОЛЕМ ТЕЧЕНИЙ

Рассмотрим ветровой пограничный слой над водной поверхностью. Для описания средних полей воспользуемся системой уравнений Рейнольдса [11], в которых используется простейшая гипотеза замыкания – градиентная аппроксимация турбулентных напряжений:

$$\sigma_{ij} = -\frac{2}{3} \langle u_i'^2 \rangle \delta_{ij} + \nu \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right), \quad (10)$$

где $\langle u_i \rangle$ – i -компонента средней скорости, $\langle u_i'^2 \rangle$ – средняя кинетическая энергия турбулентных пульсаций, ν – коэффициент турбулентной вязкости. Будем считать ν заданной функцией вертикальной координаты z . Хорошим представлением функции $\nu(z)$ является аппроксимация, полученная в [12]:

$$\nu(z) = \nu_a \left[1 + 0.4z^+ \left(1 - e^{-\left(\frac{z^+}{L}\right)^2} \right) \right]. \quad (11)$$

Здесь $z^+ = \frac{z u_*}{\nu_a}$ – вертикальная координата, выраженная в вязких длинах, u_* – скорость трения ветра, ν_a – кинематическая вязкость воздуха, постоянная

ная $L = 22.4$ для гидродинамически гладкого режима обтекания поверхности воды. Формула (11) описывает эффективную вязкость как в вязком подслое, так и в логарифмическом пограничном слое.

Будем рассматривать двумерные движения, тогда система уравнений Рейнольдса может быть записана в терминах завихренности χ и функции тока ψ :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial z} - \Delta(v\chi) + 2v_{zz} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad (12)$$

$$\Delta \psi = \chi.$$

На поверхности воды $z = \zeta(x, t)$ выполняются граничные условия непротекания и прилипания:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{z=\zeta(x,t)} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta(x,t)} = U(x, t) + \frac{\partial \tilde{\psi}_w}{\partial z},$$

где $U(x, t)$ – поле скорости во внутренней волне, которое задается формулой (9), $\tilde{\psi}_w$ – функция тока волнового возмущения в воде.

Рассматриваемая здесь модель приводного погранслоя атмосферы учитывает вязкий подслой, имеющий чрезвычайно малую толщину (< 1 мм), которую существенно превосходит типичная высота поверхностных волн. В связи с этим, для того, чтобы исключить сильную геометрическую нелинейность, необходимо перейти к криволинейным координатам, в которых одна из координатных линий совпадает с взволнованной поверхностью воды [13]. Для случая ортогональных координат (s, γ) , задаваемых преобразованием

$$x = x(s, \gamma, t),$$

$$z = z(s, \gamma, t),$$

где $z = z(s, \gamma = 0, t)$ – уравнение поверхности воды, система (12) примет вид [14]

$$\chi_t + \frac{1}{I} \chi_s (\psi_\gamma - (x_s x_t + z_s z_t)) - \frac{1}{I} \chi_\gamma (\psi_s + (x_\gamma x_t + z_\gamma z_t)) =$$

$$= \frac{1}{I} \Delta(v\chi) - \frac{2}{I^2} v_{\gamma\gamma} \psi_{ss} - \frac{I_\gamma}{I^3} ((\psi_\gamma v_\gamma)_\gamma - v_\gamma \psi_{ss}) -$$

$$- \frac{I_s}{I^3} (2v_\gamma \psi_{s\gamma} - \psi_s v_{\gamma\gamma}) + \psi_\gamma v_\gamma \frac{I_s^2 + I_\gamma^2}{I^4}, \quad (14)$$

$$\Delta \psi = \chi = \frac{1}{I} (\psi_{ss} + \psi_{\gamma\gamma})$$

с граничными условиями:

$$\psi|_{\gamma=0} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_a}{\partial \gamma} \frac{1}{\sqrt{I_a}} = \frac{\partial \psi_w}{\partial \gamma} \frac{1}{\sqrt{I_w}}. \quad (15)$$

Здесь $I = \frac{\partial(x, z)}{\partial(s, \gamma)}$ – якобиан ортогонального преобразования координат, а индексы $(\)_a$ и $(\)_w$ относятся к величинам в воздухе и воде.

Решение системы (14) надо искать в виде суммы крупномасштабного течения с индексом (0), имеющего масштабы внутренней волны, и мелкомасштабных движений, имеющих масштабы поверхностных волн:

$$\chi = \chi_0 + \chi_1, \quad (16)$$

$$\psi = \psi_0 + \psi_1.$$

В этом случае якобиан преобразования I определяется масштабами ветровых волн.

Усредняя уравнения (14) по масштабам ветровых волн, мы получим систему уравнений для крупномасштабных течений в воздухе: среднего поля скорости ветра и волновых возмущений, индуцированных течением во внутренних волнах. Вид уравнений для “крупномасштабного” течения будет совпадать с (12) с точностью до замены $(s, \gamma) \rightarrow (x, z)$, только в правой части будет стоять слагаемое $\partial^2 \tau / \partial \gamma^2$, где τ – волновой поток импульса. При слабых ветрах, когда вклад волнового потока импульса в перенос в ветровом турбулентном погранслое мал [15], этим слагаемым можно пренебречь. При сильных ветрах влияние волнового потока импульса можно учесть, если использовать модифицированное выражение для эффективной вихревой вязкости [16]¹.

При этих предположениях система уравнений для крупномасштабных возмущений совпадает с (12) с точностью до замены $z \rightarrow \gamma, x \rightarrow s$ с граничными условиями:

$$\psi|_{\gamma=0} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} = U(s, t). \quad (13')$$

Из (8) следует, что поле скорости $U(s, t)$ представляет собой стационарную волну, т.е. $U = U(s - ct)$. Пе-

¹ Заметим, что рассуждения, касающиеся случая сильных ветров, являются нестрогими, и их трудно обосновать. В связи с этим мы будем применять настоящую модель только к случаю достаточно слабых ветров.

переходя в систему координат, бегущую со скоростью c , получим систему стационарных уравнений:

$$\frac{\partial \psi \partial \chi}{\partial \gamma \partial s} - \frac{\partial \psi \partial \chi}{\partial s \partial \gamma} = \Delta(v\chi) - 2v_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}, \quad (17)$$

$$\Delta \psi = \chi$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \psi|_{\gamma=0} &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} &= U(s) - c, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma \rightarrow \infty} &= \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{\gamma}{\gamma_0} - c, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\kappa = 0.4$ – постоянная Кармана, γ_0 – параметр шероховатости. Последнее из граничных условий означает, что возмущение убывает при удалении от поверхности, и поле скорости стремится к невозмущенному логарифмическому профилю.

Из (8) и (9) следует, что значения U и c в граничных условиях (18) одного порядка. Отсюда следует, что, вообще говоря, следует решать полную нелинейную систему (17). Однако характерный вид решения в рассматриваемом диапазоне параметров системы (17) позволяет использовать для ее решения линейное приближение. Сделаем оценки. В задаче есть следующие характерные масштабы: 1) высота критического слоя h_{kc} ; 2) высота вязкого подслоя h_b ; 3) толщина волнового пограничного слоя δ .

Для рассматриваемых волновых возмущений критический слой лежит внутри вязкого подслоя. Действительно, фазовая скорость волны $c = 50$ см/с, $u_* > 10$ см/с, а скорость на границе вязкого подслоя $U \approx 10-12 u_* > 100-120$ см/с [11].

В этой области значение завихренности невозмущенного течения $\chi_0 = u_*^2 / \nu_a$, а профиль скорости почти линейный, значит высота критического слоя $h_{kc} \sim c / \chi_0 = c \nu_a / u_*^2$. Принимая во внимание первое и второе граничные условия (18), легко получить оценку ψ вблизи критического слоя $\psi \sim c h_{kc} \sim c^2 \nu_a / u_*^2$. В критическом слое средние и волновые поля имеют один порядок. С учетом этого получим оценку левой части (17): ЛЧ $\sim \frac{c u_*^2}{\nu_a L_x}$, где L_x –

горизонтальный масштаб возмущений, определяемый полем скорости $U(x, t)$. Оценка правой части:

$$\begin{aligned} \text{ПЧ} &\sim \frac{u_*^2}{h_{kc}^2} \sim \frac{u_*^4}{c^2 \nu_a^2}. \text{ Отношение ПЧ/ЛЧ} \sim \frac{u_*^2 L_x}{c^3 \nu_a} \approx \\ &\approx \left(\frac{u_*}{c} \right)^2 \frac{L_x}{c \nu_a}. \text{ При параметрах данной задачи } u_* > \\ &> 10 \text{ см/с, } c = 50 \text{ см/с, } L_x \approx 25 \text{ м имеем ПЧ/ЛЧ} > 40. \end{aligned}$$

В правой части уравнения (17) стоит линейное выражение, так что хотя средние поля и их возмущения имеют один порядок, они удовлетворяют линейному уравнению. По существу это означает, что вблизи поверхности воды мы пренебрегаем вертикальным конвективным переносом импульса по сравнению с вязким.

При удалении от поверхности воды возмущение скорости, зависящее от x , будет убывать на некотором масштабе, который мы обозначим δ , а средняя скорость будет нарастать по логарифмическому закону. В связи с этим можно ожидать, что на расстоянии от поверхности, большем δ , для описания волновых возмущений так же, как и вблизи поверхности (при $z \ll \delta$) можно использовать линейное приближение. Тогда во всем волновом пограничном слое нелинейностью возмущений, индуцированных внутренней волной, можно пренебречь. Более строгие степени оценки “нелинейности” возмущений воздушного потока, индуцированных внутренней волной, проведены ниже на основании численного решения системы уравнений для возмущений. Таким образом, уравнение для расчета возмущений имеет вид:

$$(U(s) - c) \frac{\partial \chi_1}{\partial s} - U_{0\gamma\gamma} \frac{\partial \psi_1}{\partial s} = \Delta(v(\gamma)\chi_1) - 2v_{\gamma\gamma} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial s^2},$$

$$\Delta \psi_1 = \chi_1,$$

$$\psi_1|_{\gamma=0} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} = U(s),$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma \rightarrow \infty} = 0;$$

где $U_0 = -c + \int_0^\gamma \frac{u_*^2}{\nu(z)} dz$. Если $v(z)$ определяется формулой (11), то при $\gamma \rightarrow 0$ асимптотика этого выражения $U_0 = -c + \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{\gamma}{\gamma_0}$.

Для решения таких уравнений можно использовать численную схему, описанную в [14], модифицированную на случай не гармонического возмущения.

Будем искать решение уравнения (19) в виде интеграла Фурье:

$$(\chi_1, \psi_1) = \int_{-\infty}^{\infty} (\chi_{1k}, \psi_{1k})(\gamma) e^{iks} dk.$$

Тогда (χ_{1k}, ψ_{1k}) удовлетворяют следующей системе уравнений и граничных условий:

$$\begin{aligned} & (U_0(\gamma) - c)\chi_{1k} - U_{0\gamma\gamma}\psi_{1k} = \\ & = \frac{1}{ik} \left[\left(\frac{d^2}{d\gamma^2} - k^2 \right) (v(\gamma)\chi_{1k}) + 2v_{\gamma\gamma}k^2\psi_{1k} \right], \\ & \frac{d^2\psi_{1k}}{d\gamma^2} - k^2\psi_{1k} = \chi_{1k}, \\ & \psi_{1k}|_{\gamma=0} = 0, \\ & \frac{d\psi_{1k}}{d\gamma} \Big|_{\gamma=0} = \widehat{U}(k), \\ & \psi_{1k}|_{\gamma \rightarrow \infty} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $\widehat{U}(k)$ – фурье-образ $U(s)$.

С использованием результатов численного решения уравнения (20) можно сделать оценку нелинейности волновых возмущений. Уравнение (20) получается из (17) отбрасыванием “нелинейных”

слагаемых в левой части: $\theta = \frac{\partial \chi' \partial \psi'}{\partial s \partial \gamma} - \frac{\partial \chi' \partial \psi'}{\partial \gamma \partial s}$, где

χ', ψ' – возмущения завихренности и скорости, связанные соотношением $\chi' + \Delta \psi'$. При $\gamma \ll 1/k$ мож-

но ожидать, что $\theta \approx \frac{\partial^2}{\partial s \partial \gamma} (\psi'^2) - \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} (\psi' \psi'_s)$, где первое и второе слагаемые имеют один порядок.

Исходя из этого, характеристикой нелинейности уравнения (17) будем считать отношение $Re =$

$$= \frac{\psi'_\gamma \psi'_s}{\max[v\chi'; \psi_{\gamma 0} \psi'_s]},$$

имеющее смысл эффективного числа Рейнольдса. График зависимости $Re(z)$ показан на рис. 2. Видно, что эта величина везде невелика, что дает возможность решать задачу в линейном приближении. Аналогичный результат был получен в [14], где на основании численных расчетов было показано, что волновые возмущения в воздухе с хорошей точностью описываются в рамках квазилинейного приближения, при этом единственным нелинейным эффектом является появление добавки к среднему профилю скорости. Оценим для нашего случая порядок отношения величины волнового потока импульса $\langle u'w' \rangle$ к среднему турбулентному потоку импульса u_*^2 : $\tau = \langle u'w' \rangle / u_*^2$.

Если масштабы поля скорости по s и γ равны соответственно L_x и δ , то $\tau = \frac{\langle u'w' \rangle}{u_*^2} \approx \frac{\langle u'^2 \rangle}{u_*^2} \frac{\delta}{L_x}$. В слу-

чае, когда критический слой находится в вязком подслое, энергообмен волны с потоком происходит за счет работы вязких напряжений [17] (так называемый механизм “отрицательной вязкости”). При этом вертикальный масштаб волновых

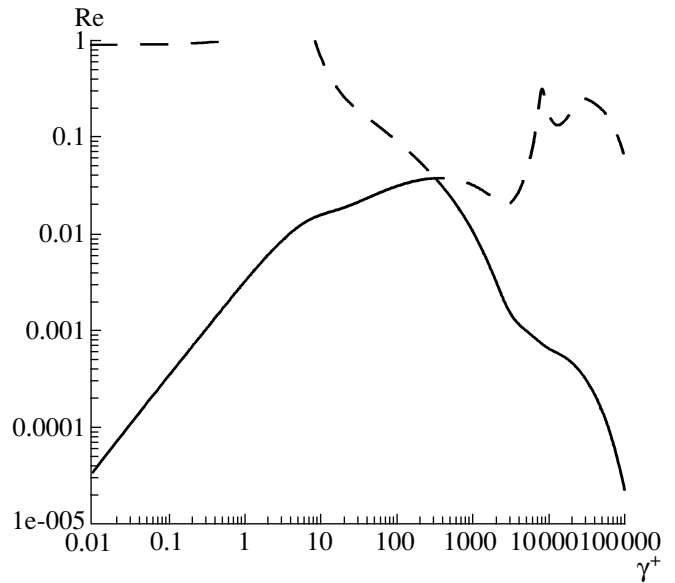


Рис. 2. Зависимость эффективного числа Рейнольдса в волновом возмущении, индуцированном в воздухе внутренней волной, от вертикальной координаты.

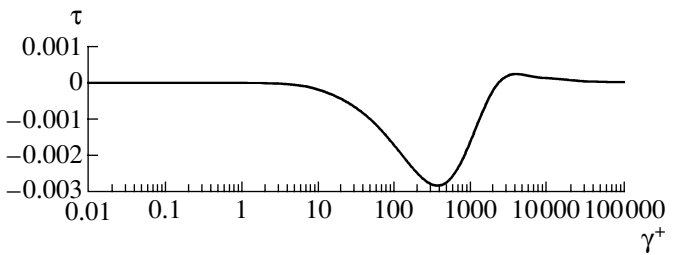


Рис. 3. Зависимость отношения величины волнового потока импульса к среднему турбулентному потоку от вертикальной координаты.

полей определяется как масштаб турбулентного волнового пограничного слоя δ , на котором слагаемые $(U_0 - c) \frac{\partial \chi_1}{\partial s}$ и $\Delta(v\chi_1)$ имеют один порядок,

$$\text{т.е. } \left(\frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{\delta}{z_0} - c \right) \frac{1}{L_x} \approx \frac{\kappa u_* \delta}{\delta^2}.$$

Тогда масштаб δ определяется из уравнения $\frac{\delta}{z_0} \left(\ln \frac{\delta}{z_0} - \frac{\kappa c}{u_*} \right) = \frac{\kappa^2 L_x}{z_0}$.

Отсюда следует оценка $\frac{\delta}{L_x} \approx \frac{\kappa^2}{\ln L_x / z_0}$, т.е. $\frac{\langle u'w' \rangle}{u_*^2} \approx$

$$\frac{\langle u'^2 \rangle}{u_*^2} \frac{\kappa^2}{\ln L_x / z_0}.$$

Оценка сверху для $\langle u'^2 \rangle - c^2$, фактически $\langle u'^2 \rangle \approx 0.1 - 0.01 c^2$, поскольку поле скорости убывает на

масштабе δ . При $u_* = 10$ см/с, $L_x = 25$ м, $z_0 = 0.1 \frac{v_a}{u_*}$ можно получить $\tau = \frac{\langle u'w' \rangle}{u_*^2} \approx 0.025 - 0.0025 \ll 1$. На

рис. 3 представлена зависимость $\tau(\gamma)$ для параметров данной задачи. Видно, что $\tau \ll 1$ везде. Это говорит о применимости линейного приближения.

Уравнение (20) для k -й гармоники решалось численно. При этом оказалось, что форма решения на масштабах порядка толщины вязкого подслоя мало зависит от k . В этом случае, вычисляя обратное преобразование Фурье от полученного решения, можно представить поле скорости возмущения, индуцированного в воздухе полем внутренней волны, в виде:

$$U(s, \gamma) = \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} = U(s) \operatorname{Re} \left[\frac{d\Psi_{1k}}{d\gamma} \right] + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(s')}{s-s'} ds' \operatorname{Im} \left[\frac{d\Psi_{1k}}{d\gamma} \right], \quad (21)$$

где Ψ_{1k} – решение уравнения (20) с граничным условием $\Psi_{1k\gamma} = 1$ при любом достаточно малом k .

Входящие в (20) поля завихренности, индуцированные волной $\chi = \frac{\partial U}{\partial \gamma}$, а также $\chi_\gamma = \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma^2}$, легко вычисляются с использованием (21).

3. МОДУЛЯЦИЯ КОРОТКИХ ВЕТРОВЫХ ВОЛН В ПОЛЕ ВЕТРА НАД МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ПРИСУТСТВИИ ВНУТРЕННЕЙ ВОЛНЫ

Изменение спектральной плотности энергии коротких поверхностных волн $F(K, x, t)$ описывается кинетическим уравнением, которое можно представить в виде:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (C_g + U(x, t)) \frac{\partial F}{\partial x} - K \left(\frac{\partial F}{\partial K} + \tilde{\eta} F \right) \frac{\partial U}{\partial x} = \operatorname{Int}[F, K] + 2B(F, K, U_0, x, t)F, \quad (22)$$

где $U(x, t)$ – поле скорости во внутренней волне; $\operatorname{int}[F, K]$ – “интеграл столкновений”, определяющий нелинейное взаимодействие волн; $2B(F, K, U_0, x, t)$ – модулированный инкремент короткой волны, равный алгебраической сумме ветрового инкремента, определяемого скоростью ветра U_0 , и декремента вязкой диссипации, $\tilde{\eta}$ – “фактор растяжения”, введенный в [18, 19]. При отсутствии дрейфового течения

$$\tilde{\eta} = \frac{C_g}{C_f} - 1,$$

где $C_g = \partial \Omega_0 / \partial K$ – групповая, а $C_f = \Omega_0 / K$ – фазовая скорости короткой волны; Ω_0 – ее собственная частота, K и Ω – волновое число и частота короткой волны в лабораторной системе отсчета; $\Omega = KU(x, t) + \Omega_0$.

Прежде чем переходить к расчетам функции F , сделаем оценки слагаемых в уравнении (22) для параметров внутренних и поверхностных волн настоящей задачи. Слагаемое в левой части, описывающее кинематические эффекты, имеет порядок $\frac{c}{L_x} F$, где c – фазовая скорость внутренней волны ($c = 50$ см/с), а L_x – ее характерный масштаб

($L_x \approx 25$ м); тогда $\frac{c}{L_x} F \sim 2 \times 10^{-2} F$. Правая часть

уравнения (22) описывает эффекты, обусловленные генерацией волн ветром и нелинейным взаимодействием волн. В сантиметровом диапазоне поверхностных волн имеет место баланс этих эффектов [20], поэтому правую часть уравнения (22) можно оценить с использованием инкремента по-

верхностных волн $\beta = (0.02 - 0.04) \frac{u_*^2}{C_f^2} \Omega_0 - 2\nu_w K^2$,

$\nu_w = 0.01$ см²/с – кинематическая вязкость воды [23].

Если волновое число короткой волны $K = 3$ см⁻¹, то $\Omega_0 \sim 70$ с⁻¹, $C_f \sim 23$ см/с; и при $u_* = 20$ см/с имеем $\beta \sim 1$ с⁻¹, а при $u_* = 10$ см/с $\beta \sim 0.1$ с⁻¹, поскольку такая скорость трения ветра близка к порогу генерации. Отсюда следует, что левая часть, описывающая кинематические эффекты в поле коротких волн, мала, и основная роль в модуляции коротких волн принадлежит модуляции их инкремента. Ранее в работе [22] была изучена модуляция коротких поверхностных волн в поле интенсивных внутренних волн без учета модуляции инкремента и показано, что в случае очень интенсивных внутренних волн значительный гидродинамический контраст существует даже для волн сантиметрового диапазона. Дальнейшим шагом будет исследование совместного действия двух эффектов.

Для расчета модуляции инкремента коротких волн в присутствии внутренней волны мы воспользуемся системой уравнений для коротких волн в присутствии длинных волн аналогичной той, которая применялась в [7]. В линейном приближении коротковолновые возмущения функ-

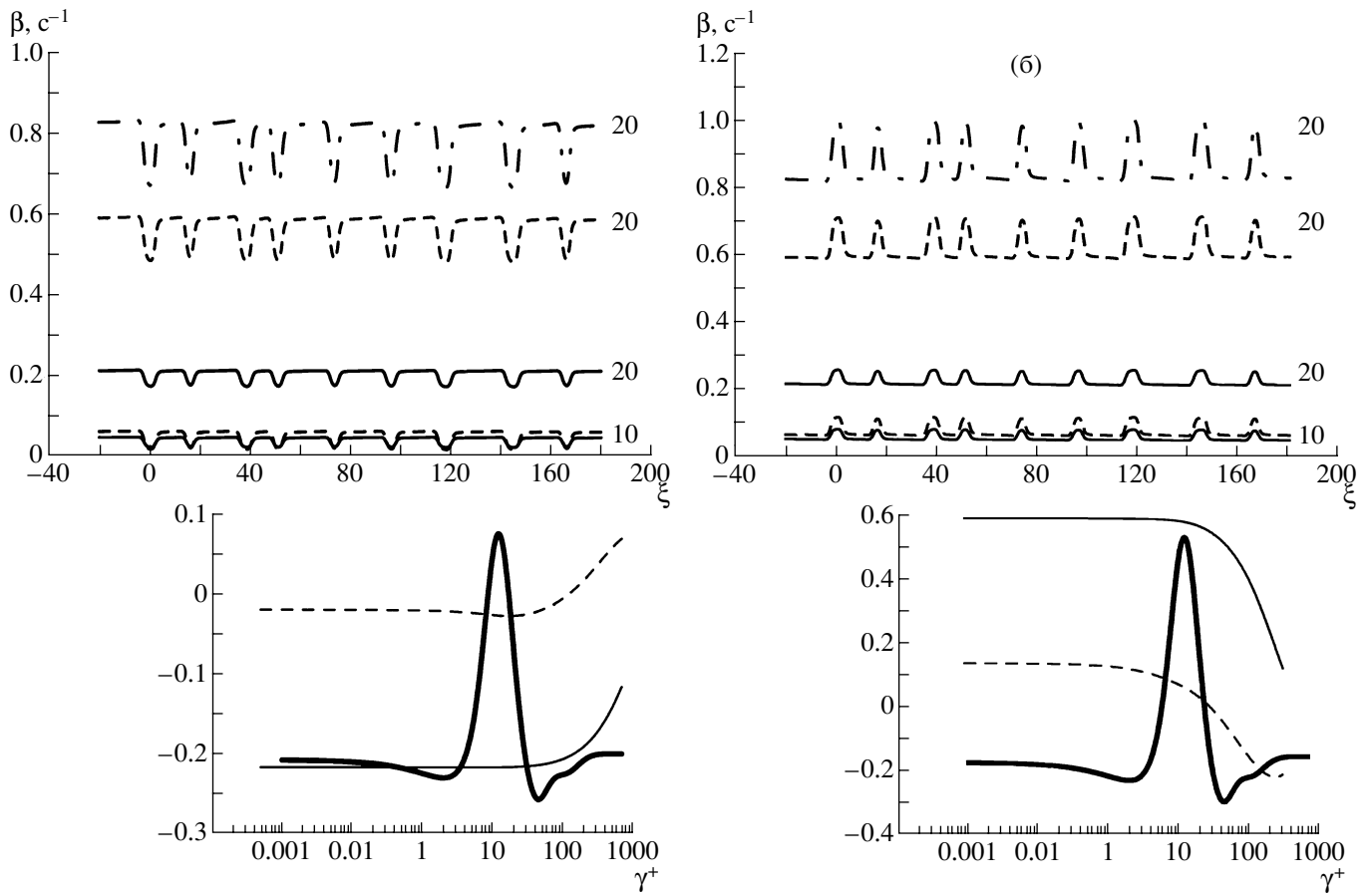


Рис. 4. а – Зависимости инкремента от горизонтальной координаты $\xi = x/L_x$ ($L_x = 25.7$ м). Направление фазовой скорости внутренней волны по ветру. --- для $K = 1 \text{ см}^{-1}$; - - - - $K = 2 \text{ см}^{-1}$; - · - · - $K = 3 \text{ см}^{-1}$. Цифры у графиков – соответствующие значения скорости трения ветра. На врезке профили реальной (-) и мнимой (- -) частей возмущений тангенциального напряжения ветра, индуцированного длинной гармонической волной. Жирная кривая – плотность мощности энергообмена короткой волны с ветром. б – То же, что на рис. 4а, но направление фазовой скорости внутренней волны против ветра.

ции тока ψ_2 и завихренности χ_2 удовлетворяют следующей системе уравнений [7]:

$$\begin{aligned} & \left[(\Phi_{0\gamma}\chi_2 - \psi_2\chi_{0\gamma})iK - \left(\frac{d^2}{d\gamma^2} - K^2 \right) (\chi_2 v) \right] = \\ & = -2v_{\gamma\gamma}\psi_2 K^2 - 2KAe^{-K\gamma}(\Phi_{0\gamma}v_{\gamma})_{\gamma}, \quad (23) \\ & \frac{d^2\psi_2}{d\gamma^2} - K^2\psi_2 = \chi_2 - 2KAe^{-K\gamma}\chi_0 \end{aligned}$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \psi_2|_{\gamma=0} &= 0, \\ \psi_{2\gamma}|_{\gamma=0} &= 2C_f KA. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь $\Phi_{0\gamma} = U_0(\gamma) + U(s, \gamma) - C_f$, где $U(s, \gamma)$ определяется формулой (21); $\chi_0 = \Phi_{0\gamma\gamma}$; A – амплитуда короткой поверхностной волны.

В системе (23) и граничных условиях (24) можно пренебречь зависимостью волнового числа K и

фазовой скорости C_f короткой поверхностной волны от фазы внутренней волны, поскольку в рассматриваемом диапазоне параметров кинематические эффекты малы по сравнению с влиянием взаимодействия с ветром.

Находя решение системы (23), можно вычислить ветровой инкремент коротких волн по формуле:

$$\beta_w = \frac{\rho_a}{2\rho_w} v_a \left[-\frac{\text{Re}(\chi_{2\gamma} - K\chi_2)}{C_f KA} + 4K^2 \right]. \quad (25)$$

При этом полный инкремент короткой волны, модулированной внутренней волной, имеет вид:

$$\beta = -2v_w K^2 + \beta_w.$$

Зависимости β от фазы волны представлены на рис. 4а и 4б) для случаев, когда внутренняя волна распространяется по ветру (рис. 4а) и против ветра (рис. 4б). Сравнение с рис. 1, на котором изображена зависимость смещения изоцикл во внутренней волне от ξ , показывает, что максимум

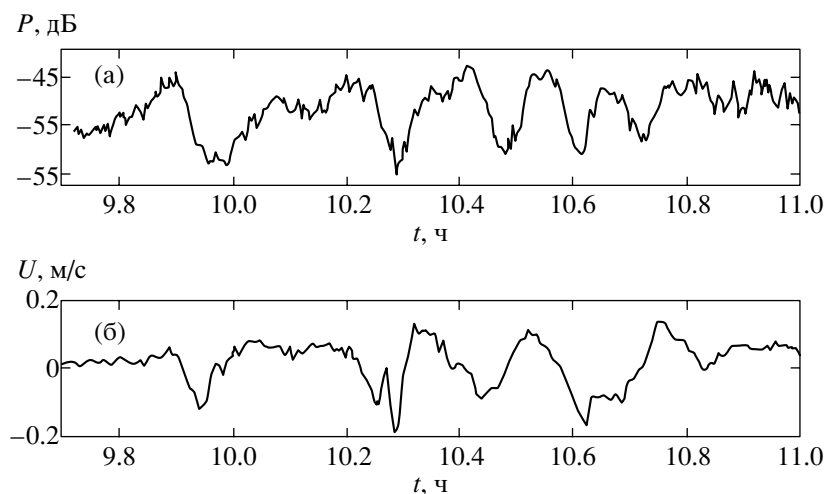


Рис. 5. Зависимость мощности рассеянного радиосигнала (а) и горизонтального потока на глубине 30 м от времени (б) (по данным [25]).

смещения (и горизонтальной скорости) совпадает с минимумом инкремента ветровых волн при попутном ветре (рис. 4а) и с максимумом их инкремента при встречном ветре (рис. 4б). Для пояснения этого эффекта на рис. 4а и 4б представлены врезки, на которых изображены профили реальной ($\text{Re}T_1$) и мнимой ($\text{Im}T_1$) частей возмущения тангенциального напряжения в ветре, индуцированного гармонической внутренней волной с волновым числом $k = 0.25 \text{ м}^{-1}$. На тех же рисунках показан профиль средней по периоду волны плотности мощности сил (радиационной и вязкой), определяющих поток энергии от ветра к волнам [21]. Видно, что в области максимального энергообмена возмущения потока импульса практически постоянны и имеют фазу, близкую к $(-\pi)$ при попутном ветре и близкую к 0 при встречном. Поскольку в области существенного энергообмена

T_1 не зависит от вертикальной координаты, то в этой области профиль скорости ветра с хорошей степенью точности можно представить в виде:

$$U_0(z) = \left(\frac{u_*}{\kappa} + \text{Re} \frac{T_1 k a e^{ikx}}{\kappa u_*^2} \right) \ln \frac{z}{z_0}.$$

Т.е. колебания эффективной скорости ветра находятся в противофазе со скоростью на поверхности в случае попутного ветра и синфазны при встречном ветре. Этот эффект допускает и простое физическое объяснение: перепад скорости между поверхностью воды и вышележащими слоями ветрового пограничного слоя меньше в случае, если на поверхности воды есть течение сонаправленное с ветром, а меньший перепад скорости приводит к меньшему напряжению трения. При противоположном направлении скоростей ветра и поверхности воды напряжение трения оказывается существенно больше.

В случае, когда в области энергообмена ветровой волны с воздушным потоком T_1 практически постоянно, модуляция ветрового инкремента полностью определяется модуляцией T_1 . Это и объясняет зависимости $\beta(\xi)$.

Применим результаты развитой модели для оценки данных эксперимента COPE, в ходе которого проводились одновременные измерения интенсивности радиоизлучения, рассеянного морской поверхностью, и колебаний термоклина на шельфе вблизи побережья штата Орегон [23]. Было обнаружено, что минимумы рассеянной мощности радиосигнала примерно находятся в фазе со смещениями термоклина. Такое же фазовое соотношение между модулированным ветровым инкрементом коротких поверхностных волн и смещением изопикны во внутренней волне по-

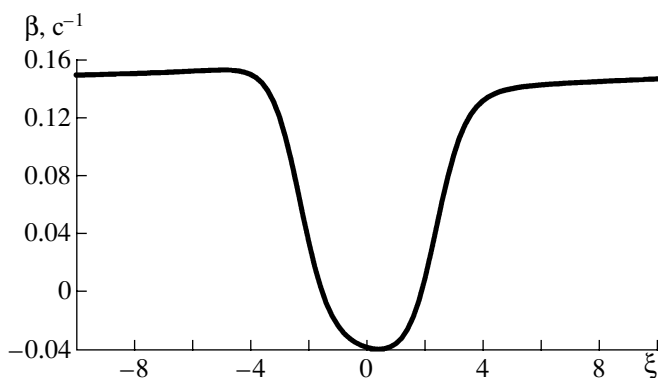


Рис. 6. Зависимость модулированного инкремента поверхностной волны от горизонтальной координаты ξ . Параметры ветра и волн соответствуют условиям 23 сентября по данным [25]. Волновое число поверхностной волны $K = 4 \text{ см}^{-1}$.

лучается при распространении внутренней волны по ветру (рис. 4а).

Для сопоставления с результатами настоящей модели применимы параметры ветра и волн, измеренные в ходе эксперимента СОРЕ 23 июля. На рис. 5 представлены данные о горизонтальной скорости течения, созданной внутренними волнами, под термоклином и рассеянном сигнале для этого случая. Заметим, что смещение изопикны находится в противофазе со скоростью течения под термоклином, т.е. и в этом случае минимум рассеянного сигнала совпадает с максимумом смещения изопикны. При этом скорость ветра составляла 9.5 м/с ($u_* \approx 28.5$ см/с), а угол между направлениями скорости ветра и распространения волны составлял $\theta \approx 60^\circ$. Скорость распространения внутренних волн составляла $c = 1.03$ м/с. Измерения проводились с помощью радиолокатора сантиметрового диапазона с длиной волны $\lambda = 3$ см под скользящими углами, т.е. брегговская длина волн составляла 1.5 см.

Были проведены расчеты модулированного инкремента брегговских волн в рамках настоящей модели для этих параметров. Заметим, что в модели считается, что скорости ветра и волн сонаправлены. Поскольку направление визирования радиолокатора совпадало с направлением распространения внутренней волны, то для оценок в качестве значения скорости на поверхности во внутренней волне бралось значение $c = 1.03$ м/с, а для скорости трения ветра выбиралось значение $u_{*1} = U_* \cos \theta \approx 14.3$ см/с. Рассчитанный модулированный инкремент представлен на рис. 6. Видно, что фаза модуляции инкремента противоположна фазе смещения изопикны, при этом в максимуме смещения изопикны даже наблюдается смена знака инкремента.

В заключение авторы выражают благодарность В. В. Баханову за полезные критические замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 02-05-65099), гранта INTAS (№ 00-242) и Фонда содействия отечественной науке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басович А.Я., Баханов В.В., Таланов В.И. Влияние интенсивных внутренних волн на ветровое волнение (кинематическая модель) // Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность. Горький: ИПФ АН СССР, 1982. С. 8–30.
2. Басович А.Я., Баханов В.В., Браво-Животовский Д.М., Гордеев Л.Б., Жидко Ю.М., Муякшин С.И. О корреляции изменения спектральной плотности сантиметровых и дециметровых поверхностных волн в поле внутренней волны // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 4. С. 967–971.
3. Ермаков С.А., Салашин С.Г. Об эффекте сильной модуляции капиллярно-гравитационной ряби вну-

тренними волнами // Докл. АН СССР. 1994. Т. 337. № 1. С. 108–111.

4. Landahl M.T., Widnall S.E., Hultgen L. An interactional mechanism between large and small scales for wind-generation water waves // Proc. 12th Symp. on Naval Hydrodynamics. National Academy of Sciences. 1978. 541p.
5. Hasselman K., Raney R.K., Plant W.J., Alpers W., Shuchman R.A., Lyzenga D.R., Rufenach C.L., Tucker M.J. Theory of synthetic aperture radar imaging: a MARSEN view // J. Geophys. Res. 1985. V. 90. P. 4659–4686.
6. Гродский С.А., Кудрявцев Е.Н., Макин Е.К. Оценка вклада вариаций ветрового потока в РЛ-модуляционную передаточную функцию морской поверхности // Морской гидрофиз. журнал. 1991. № 1. С. 15–22.
7. Троицкая Ю.И. Модуляция скорости роста короткой поверхностной волны, возбуждаемой турбулентным ветром в присутствии длинной // Препринт ИПФ РАН. № 391. 1996. 38 с.
8. Троицкая Ю.И. Квазилинейная модель модуляции коротких поверхностных волн, возбуждаемых турбулентным ветром в присутствии волны зыби // Препринт ИПФ РАН № 544. 2000. 30 с.
9. Stanton T.P., Ostrovsky L.A. Observation of highly nonlinear internal solitons over the continental shelf // Geophysical Rev. Lett. 1998. V. 25. P. 2695.
10. Горшков К.А., Соустова И.А. Взаимодействие солитонов как составных структур в модели Гарднера // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. XLIV. № 5–6. С. 502–512.
11. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. С.-Пб.: Гидрометеиздат, 1992. 696 с.
12. Смольяков А.В. Спектр квадрупольного излучения плоского турбулентного пограничного слоя // Акуст. журнал. 1973. Т. 19. Вып. 3. С. 420–425.
13. Jenkins A.D. A quasilinear eddy-viscosity model for the flux of energy and momentum to wind waves using conservation-law equation in a curvilinear coordinate system // J. Phys. Oceanogr. 1992. V. 22. № 8. P. 843–858.
14. Реутов В.П., Троицкая Ю.И. О нелинейных эффектах при взаимодействии волн на воде с турбулентным ветром // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1995. Т. 31. № 6. С. 623–628.
15. Kudryavtsev V.N., Mastenbroek C., Makin V.K. Modulation of wind ripples by long surface waves via the air flow: feedback mechanism // Boundary Layer Meteor. 1997. V. 83. P. 99–116.
16. Riley D.S., Donelan M.A., Hui W.H. An extended Miles' theory for wave generation by wind // Boundary Layer Meteor. 1982. V. 22. P. 209–225.
17. Троицкая Ю.И. Механизм модуляции волнами зыби скорости роста коротких поверхностных волн, возбуждаемых турбулентным ветром // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 1997. Т. 33. № 4. С. 525–535.
18. Longuet-Higgins M.S., Stewart R.W. Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents // J. Fluid Mech. 1960. V. 8. № 4. P. 565–583.

19. *Longuet-Higgins M.S., Stewart R.W.* The changes in the amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents // *J. Fluid Mech.* 1961. V. 10. № 4. P. 529–549.
20. *Plant W.J., Keller W.C., Cross A.* Parametric dependence of ocean wave-radar modulation transfer functions // *J. Geophys. Res.* 1983. V. 88. P. 9747–9756.
21. *Plant W.J.* A relationship between wind stress and wave slope // *J. Geophys. Res.* 1982. V. 87. P. 1961–1967.
22. *Bakhanov V.V., Ostrovsky L.A.* The action of strong solitary internal waves on surface waves // Preprint IAP RAS № 573. 2001. 26 p.
23. *Kropfli R.A., Ostrovski L.A., Stanton T.P., Skirta E.A., Keane A.N., Irisov V.* Relationships between strong internal waves in the coastal zone and their radar and radiometric signatures // *J. Geophys. Res.* 1999. V. 104. P. 3133–3148.